Analyse Mathématique S1 économie

Le cours d'analyse mathématique en S1 offre un cadre solide pour comprendre les concepts fondamentaux des fonctions, de l'intégration, et des fonctions de plusieurs variables. Ces notions sont essentielles pour de nombreuses applications en physique, économie, et ingénierie, et elles préparent les étudiants à des études mathématiques plus avancées.

Fonction numérique d'une variable réelle : On étudie les fonctions définies sur l'ensemble des nombres réels. La notion de limite permet de comprendre le comportement d'une fonction à proximité d'un point, tandis que la continuité assure qu'une fonction ne présente pas de sauts ou de discontinuités. La dérivabilité mesure la variation instantanée d'une fonction, et l'étude d'une fonction analyse ses variations, extrema et points critiques.

Primitives et calcul intégral : Les primitives permettent de trouver une fonction à partir de sa dérivée, tandis que l'intégration, notamment par diverses méthodes, aide à calculer l'aire sous une courbe. Le calcul approché d'une intégrale est parfois nécessaire lorsque le calcul exact est complexe. Les formules de Taylor et les développements limités permettent d'approximer une fonction près d'un point donné, facilitant ainsi la comparaison des fonctions.

Fonctions de plusieurs variables : Cette section traite des notions de base comme les dérivées partielles, essentielles pour mesurer la variation d'une fonction en fonction de chaque variable. Les différentielles aident à comprendre les petites variations de la fonction. L'optimisation d'une fonction à deux variables est utilisée pour trouver les extrema, et les intégrales doubles permettent de calculer des volumes sous des surfaces dans un espace à deux dimensions.

Fonction numérique d'une variable réelle

Une **fonction numérique d'une variable réelle** est une relation qui associe à chaque nombre réel un unique nombre réel. Prenons l'exemple de la fonction f(x)=x2f(x) = x^2f(x)=x2, qui associe à chaque nombre réel xxx son carré. Ce type de fonction est étudié en détail pour comprendre des propriétés telles que :

- **Ensemble des nombres réels** : L'ensemble des réels R\mathbb{R}R comprend tous les nombres rationnels et irrationnels. Il est fondamental de connaître cet ensemble, car la plupart des fonctions manipulées dans ce cours prennent des valeurs dans R\mathbb{R}R.
- **Limite et continuité** : La limite permet de déterminer le comportement d'une fonction à l'approche d'un point donné. Par exemple, la limite de f(x)=1/xf(x) = 1/xf(x)=1/x quand xxx tend vers 0 est infinie. La **continuité** signifie qu'une fonction ne présente pas de discontinuités (pas de "sauts"). Par exemple, la fonction f(x)=x2f(x) = x^2f(x)=x2 est continue sur R\mathbb{R}R.

- **Dérivabilité** : Une fonction est dite dérivable en un point si sa dérivée y existe. La dérivée mesure la variation instantanée de la fonction. Par exemple, la dérivée de f(x)=x2f(x) = x^2f(x)=x2 est f′(x)=2xf'(x) = 2xf′(x)=2x, ce qui permet de connaître la pente de la courbe en tout point. Cela aide à identifier les points où la fonction augmente ou diminue.
- **Étude d'une fonction** : On étudie une fonction pour déterminer ses extrema (maximums et minimums), ses variations, et ses points critiques. Par exemple, pour f(x)=x3−3x+2f(x) = x^3 - 3x + 2f(x)=x3−3x+2, on dérive la fonction et on cherche les points où f′(x)=0f'(x) = 0f′(x)=0 afin d'identifier les extrema locaux.

Primitives et Calcul Intégral

L'intégration est le processus inverse de la dérivation. Une **primitive** d'une fonction est une autre fonction dont la dérivée est égale à la fonction initiale. Par exemple, la primitive de f(x)=2xf(x) = 2xf(x)=2x est F(x)=x2+CF(x) = x^2 + CF(x)=x2+C, où CCC est une constante arbitraire.

- **Primitives** : Trouver la primitive d'une fonction permet de résoudre des problèmes comme le calcul d'aires sous des courbes. Si vous avez une fonction qui décrit la vitesse d'un objet en mouvement, l'intégration vous donne la position de cet objet à un instant donné.
- **Intégration** : C'est la méthode utilisée pour trouver l'aire sous une courbe, ce qui a des applications dans la physique et l'économie. Par exemple, l'intégrale de f(x)=x2f(x) = x^2f(x)=x2 entre 000 et 222 est égale à ∫02x2dx=83\int_0^2 x^2 dx = \frac{8}{3}∫02x2dx=38.
- **Méthodes d'intégration** : Il existe différentes techniques pour résoudre des intégrales, comme l'intégration par parties ou l'intégration par substitution. Ces méthodes sont particulièrement utiles pour des fonctions plus complexes.
- **Calcul approché d'une intégrale** : Lorsqu'une intégrale ne peut être résolue analytiquement, on utilise des méthodes d'approximation, comme la méthode des trapèzes, pour estimer l'aire sous une courbe.

Formule de Taylor et Développements Limités

La **formule de Taylor** permet d'approximer une fonction en un point donné à l'aide de polynômes. C'est une approximation très utilisée en physique et en ingénierie, car elle simplifie le calcul tout en conservant une bonne précision. Par exemple, la fonction exe^xex peut être approchée autour de 0 par ex≈1+x+x22!+x33!e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}ex≈1+x+2!x2+3!x3.

- **Développements limités** : Cette méthode permet de simplifier des fonctions compliquées en les remplaçant par une somme de termes plus simples. Cela est utile, par exemple, pour des calculs numériques ou pour étudier le comportement d'une fonction proche d'un point donné.

- **Comparaison des fonctions** : Les développements limités permettent aussi de comparer des fonctions entre elles, notamment pour étudier leurs comportements asymptotiques.

Fonctions de Plusieurs Variables

Les **fonctions de plusieurs variables** sont utilisées pour décrire des phénomènes complexes qui dépendent de plus d'une variable. Par exemple, la température en un point donné d'une plaque chauffante peut être modélisée par une fonction de deux variables T(x,y)T(x, y)T(x,y).

- **Notions de base** : Une fonction de plusieurs variables associe un réel à chaque couple (ou triplet, etc.) de nombres réels. Par exemple, f(x,y)=x2+y2f(x, y) = x^2 + y^2f(x,y)=x2+y2 associe la somme des carrés de xxx et yyy.

- **Dérivées partielles** : Elles mesurent la variation de la fonction par rapport à une seule variable, en gardant les autres constantes. Par exemple, pour f(x,y)=x2+y2f(x, y) = x^2 + y^2f(x,y)=x2+y2, la dérivée partielle par rapport à xxx est ∂f∂x=2x\frac{\partial f}{\partial x} = 2x∂x∂f=2x, tandis que la dérivée partielle par rapport à yyy est ∂f∂y=2y\frac{\partial f}{\partial y} = 2y∂y∂f=2y.

- **Différentielles** : Elles permettent d'approximer de petites variations de la fonction en fonction des variations des variables indépendantes. Cela est particulièrement utile en physique pour modéliser des changements infimes.

- **Optimisation d'une fonction à deux variables** : Trouver les extrema d'une fonction à deux variables nécessite d'analyser ses dérivées partielles. Par exemple, pour optimiser une fonction de production P(x,y)P(x, y)P(x,y), où xxx et yyy sont des intrants de production, on cherche à maximiser PPP en résolvant ∂P∂x=0\frac{\partial P}{\partial x} = 0∂x∂P=0 et ∂P∂y=0\frac{\partial P}{\partial y} = 0∂y∂P=0.

- **Intégrales doubles** : Elles permettent de calculer des volumes sous des surfaces dans l'espace à deux dimensions. Par exemple, si vous souhaitez calculer le volume d'une montagne modélisée par f(x,y)f(x, y)f(x,y), vous utilisez une intégrale double pour obtenir une approximation précise du volume.